27.1.2020.

Domaći zadatak iz predmeta
OSNOVI FURIJEOVE ANALIZE

1. Razviti u Furijeov red funkciju koja je na $[-1, 1]$ data sa $f(x) = x^2$. Pomoću dobijenog Furijeovog reda izračunati sume redova:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

2. Odrediti Furijeovu transformaciju funkcije $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x^2/2}$, gde su a, b i c realni parametri.

3. Koristeći rezultat $\mathcal{F}[e^{-x^2/2}](\xi) = e^{-\xi^2/2}$ i osobine Furijeove transformacije, odrediti Furijeovu transformaciju funkcije ("Gausijana")

$$\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Izračunati konvoluciju $\varphi_{m_1,\sigma_1} * \varphi_{m_2,\sigma_2}$. Napomena: konvoluciju posmatrati bez faktora $1/\sqrt{2\pi}$, te onda $\mathcal{F}[f_1 * f_2] = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}[f]\,\mathcal{F}[g]$.

4. Neka je

$$f_a(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2 + x^2},\ a > 0.$$

Koristeći Furijeovu transformaciju, dokazati da $f_a * f_b = f_{a+b}$.
Napomena: konvoluciju posmatrati bez faktora $1/\sqrt{2\pi}$, te je onda $\mathcal{F}[f_1 * f_2] = \sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}[f]\,\mathcal{F}[g]$.

5. Primenom Furijeovih redova rešiti PDJ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= 3\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),\ 0 < x < \pi,\ 0 < t,\\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0,\ 0 < t,\\
u(x,0) &= \sin^2 x,\ 0 < x < \pi.
\end{aligned}$$

Napomena: Oprezno sa slučajem ukoliko je separaciona konstanta α jednaka nuli.

6. Primenom Furijeove transformacije odrediti rešenje telegrafske jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \alpha^2 u(x,t) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),\ -\infty < x < \infty,\ t > 0,$$
$$u(x,0) = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ -\infty < x < \infty,$$

gde parametar $\alpha > 0$ opisuje otpornost, a $c > 0$ je brzina prostiranja. Napomena: rešenje jednačine $y'' + Ay' + By = 0$ potražiti u obliku $y(x) = e^{rt}$ za parametar r odabran na odgovarajući način. Pretpostavlja se da postoji Furijeova transformacija funkcije f.

Napomena: Student BIRA da li će rešavati zadatak 3 ili zadatak 4. Urađene zadatke predati najkasnije do 19.2.2020. u 12 časova. Svaki tačno urađen zadatak donosi po 2 poena.

Neka konačna rešenja za proveru:

5)

$$u(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x e^{-12t}$$

6)

$$u(x,t) = e^{-\alpha t}\cdot\frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2}$$